29/11/2016

Απόλυτα συνεχείς τελεστές

ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω ένας γραμμικός διανυσματικός χώρος H, εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο. Τότε ένας τελεστής που δρα στον χώρο H είναι πλήρως ή απόλυτα συνεχής αν μετασχηματίζει μια φραγμένη ακολουθία διανυσμάτων του χώρου σε μια ακολουθία που έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

ΘΕΩΡΗΜΑ. Έστω ένας τελεστής A που δρα σε ένα χώρο Hilbert, ο A είναι αυτοπροσαρτημένος και πλήρως συνεχής. Τότε:

(α) Οι ιδιοτιμές του τελεστή A είναι πραγματικές ($A|f\rangle = \lambda|f\rangle$)

(β) Υπάρχει τουλάχιστον μια μη-μηδενική ιδιοτιμή του A.

(γ) Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μια μη-μηδενική ιδιοτιμή είναι πεπερασμένα το πλήθος. Αν είναι παραπάνω από ένα λέγονται εκφυλισμένα

(δ) Τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή A αποτελούν βάση του χώρου Hilbert.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ STURM-LIOUVILLE

Στα παρακάτω η έννοια του εσωτερικού γινομένου θα χρησιμοποιείται με την γενική της μορφή:

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b w(x)\, f^*(x) g(x)\, dx$$

όπου $w(x)$ = συνάρτηση βάρους

Θεωρούμε λοιπόν τις διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$Lu = \lambda u$ με $L = a(x)\dfrac{d^2}{dx^2} + b(x)\dfrac{d}{dx} + \gamma(x)$

προβλήματα ιδιοτιμών

↳ πραγματικός τελεστής

Ζητάμε τον προσαρτημένο τελεστή του L δηλαδή

$$\langle g|Lf\rangle = \underbrace{\int_a^b w(x) g^*(x)\, Lf(x)\, dx}_{\text{ανάλυση του } L} = \int_a^b \underbrace{w(x) g^*(x) a(x)}_{w_1(x)} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\, dx +$$

$$+ \int_a^b \underbrace{w(x) g^*(x) b(x)}_{w_2(x)} \frac{df(x)}{dx}\, dx + \int_a^b w(x) g^*(x) \gamma(x) f(x)\, dx$$

Έστω $w_1(x) = w(x) g^*(x) a(x)$

$w_2(x) = w(x) g^*(x) b(x)$

Τότε: $\int_a^b w_1(x) f''(x)\, dx = w_1 f'\Big|_a^b - \int_a^b w_1' f'\, dx =$ με παραγοντική ολοκλήρωση

$$= w_1 f'\Big|_a^b - w_1' f\Big|_a^b + \int_a^b w_1'' f\, dx$$

και

$\int_a^b w_2(x) f'(x)\, dx = w_2 f\Big|_a^b - \int_a^b w_2'(x) f(x)\, dx$ (παραγοντική ολοκλ.)

<u>Συνολικά</u>: $\langle g|Lf\rangle = Q(f,g)\Big|_a^b + \int_a^b \left(w_1'' f - w_2' f + w g^* \gamma f\right) dx$

$w_1'' = [(wa) g^*(x)]'' = (wa)'' g^* + 2(wa)' g^{*\prime} + wa g^{*\prime\prime}$

$w_2' = [(wb) g^*(x)]' = (wb)' + (wb) g^{*\prime}$

και τελικά

$$\langle g|Lf\rangle = Q(f,g)\Big|_a^b + \int_a^b \left(wa g^{*\prime\prime} f - wb g^{*\prime} f + w\gamma g^* f\right) dx +$$

προσθέτω και αφαιρώ το wbg^*f

$$+ \int_a^b \left[(wa)'' g^* f + 2(wa)' g^{*\prime} - (wb)' g^*\right] f\, dx =$$

$$= Q(f,g)\Big|_a^b + \int_a^b \underbrace{\left(wa g^{*\prime\prime} f + wb g^{*\prime} f + w\gamma g^* f\right)}_{= Lg^*} dx +$$

$$+ \int_a^b \left[(wa)'' g^* + 2(wa)' g^{*\prime} - (wb)' g^* - 2wb g^{*\prime}\right] f\, dx =$$

γράφω τους 2 όρους σε ένα ολοκλήρωμα και τους άλλους 2 σε άλλο

$$= Q(f,g)\Big|_a^b + \int_a^b w L g^* f\, dx +$$

$$+ \int_a^b \left[(wa)'' - (wb)'\right] g^* f\, dx + 2\int_a^b \left[(wa)' - wb\right] g^{*\prime} f\, dx$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που:

(α) $Q(f,g)|_a^b = 0 \longrightarrow w_1 f'|_a^b - w_1' f|_a^b + w_2 f|_a^b = 0$

(β) $(wa)' - wb = 0 \Rightarrow \frac{1}{w} \cdot \frac{d(wa)}{dx} = b$

Όταν ισχύουν αυτές οι δύο συνθήκες ((α) και (β)) έχουμε $\langle Lg|f\rangle = \langle g|Lf\rangle$ δηλ. ο τελεστής L είναι αυτοπροσαρτημένος

Τότε:

$$w'a + wa' = wb \Rightarrow aw' + (a'-b)w = 0$$

και

$$Q(f,g)|_a^b = wa[f^*g' - gf^{*\prime}] = 0$$

Επίσης $L = \frac{1}{w}\left[\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + \gamma(x)w(x)\right]$, $p(x) = a(x)w(x)$

εξίσωση ιδιοτιμών

Συμπέρασμα!!! Ξεκινώντας από το σύστημα $Lu = \lambda u$ και χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση βάρους $w(x)$ έτσι ώστε

$aw' + (a'-b)w = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{w'}{w} = \frac{b-a'}{a} \overset{a\neq 0}{=} \frac{b}{a} - \frac{a'}{a} \xRightarrow{\text{ολοκλ}}$

$\Rightarrow \ln w = \int \frac{b}{a}dx + \ln a \Rightarrow \boxed{w(x) = \left|\frac{c}{a(x)}\right| e^{\int \frac{b}{a}dx}}$, $w(x) > 0$ θετική συνάρτηση

a, b συναρτήσεις του x δηλ. $a(x), b(x)$

εκτιμήσαμε τη συνάρτηση βάρους

→ Ορίζουμε το σύστημα:

$Lu = \lambda w u$, $w(x) > 0$ συνάρτηση βάρους, όπου

$L = \frac{d}{dx}(wa)\frac{d}{dx} + \gamma(x)w(x)$ με συνοριακές συνθήκες:

$wa[f^*g' - gf^{*\prime}]_a^b = 0$ και ο τελεστής είναι αυτοπροσαρτημένος, τότε $\lambda \in \mathbb{R}$ → πραγματικές ιδιοτιμές

Τα συστήματα αυτής της μορφής καλούνται συστήματα Sturm-Liouville

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα ορθογώνια πολυώνυμα

Παραδείγματα

- Πολυώνυμα Legendre

$a(x) = 1 - x^2$, $b(x) = 2x$, $\gamma(x) = l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$, $[a,b] = [-1,1]$

Τότε $w(x) = \dfrac{1}{1-x^2} e^{-\int \frac{2x}{1-x^2} dx} = 1$

Η Δ.Ε. που μας δίνει τα πολυώνυμα Legendre είναι:

$(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} + l(l+1)y = 0$, $l \in \mathbb{N}$

- Πολυώνυμα Laguerre

$a(x) = x$, $b(x) = v + 1 - x$, $\gamma(x) = \gamma_0$, $0 < x < \infty$ και v, γ_0 σταθερές

$w(x) = x^v e^{-x}$

ΔΕ που δίνει τα πολ/μα Laguerre:

$x\dfrac{d^2y}{dx^2} + (v+1-x)\dfrac{dy}{dx} + \gamma_0 y = 0$

- Πολυώνυμα Hermite

$a(x) = 1$, $b(x) = -2x$, $\gamma(x) = 2\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Τότε $w(x) = e^{-x^2}$

Δ.Ε: $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2\lambda y = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Ασκήσεις φυλλαδίου
6-7-8
1° φυλλάδιο